# Mathematisches Modell des Roboters
# Teil II

2020

# 1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Die Gleichungen der Bewegung (Equations of Motion, EOM) sind das Herzstück des Models. Ohne sie gibt es nichts zu modellieren. Darüber hinaus können die EOM für fortgeschrittene Regelung und Filterung verwendet werden, zum Beispiel in einem Kalman-Filter.

Der balancierende Roboter sollte wie folgt modelliert werden, siehe auch Abbildung 1. Der Körper des Roboters kann vereinfacht als ein dünner Stab dargestellt werden, dessen Masse $m_b$ nur im Massenschwerpunkt des Roboters konzentriert ist, der in Abbildung 2 als größerer Punkt dargestellt ist. Der Massenschwerpunkt liegt in einer Entfernung von $l_b$ vom Radmittelpunkt. Das Rad hat einen Radius von $l_w$ und eine Masse von $m_w$.

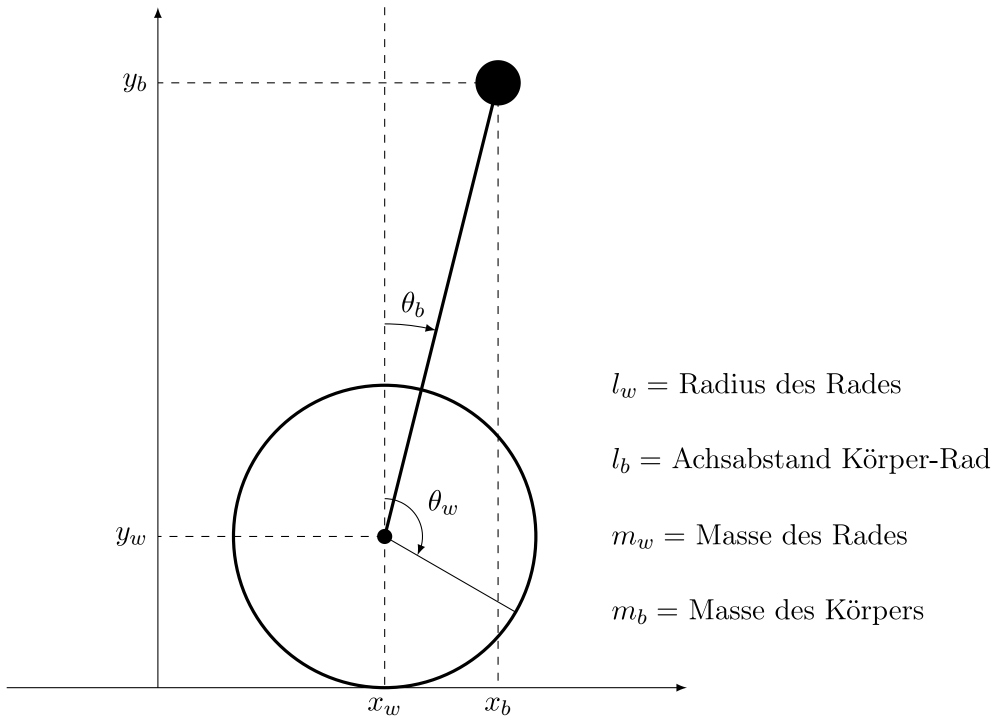


*Figure 1: Eine einfache schematische Darstellung eines einrädrigen balancierenden Roboters, bei dem die gesamte Masse des Roboters (außer der Masse der Räder) in seinem Massenschwerpunkt konzentriert ist.*

Um das Problem zu vereinfachen, sollten die folgenden Annahmen getroffen werden:

1. Der Roboter bewegt sich in einer flachen und horizontalen Umgebung, d.h es gilt immer: $\dot{y}_w = 0$.
2. Die Räder drehen nie durch und der Roboter wird nie durch externe Faktoren gedreht, d.h es gilt immer: $x_w = l_w \theta_w$.
3. Die aerodynamischen Reibungen sind vernachlässigbar gering.
4. Die Induktivität $L_m$ und der Motorviskositätskoeffizient $b_m$ sind vernachlässigbar.
5. Die einzigartige Kraft, die bestimmt und geregelt werden kann, ist das Drehmoment, das der Motor auf das Rad ausübt, und dieses Drehmoment wird durch die Spannung angetrieben, die an den Motor angelegt wird.

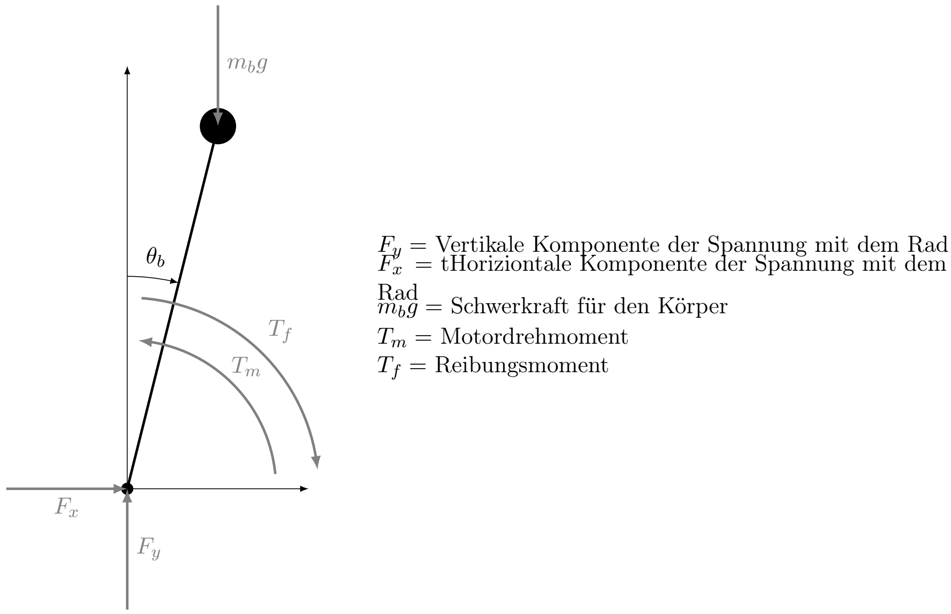


*Figure 2: Zusammenfassung der Kräfte, die auf den Körper des balancierenden Roboters wirken.*

Das Newton'sche Gesetz für die lineare Bewegung von **Körpern** besagt, dass

$$m_b \ddot{x}_b = F_x \tag{1}$$
$$m_b \ddot{y}_b = F_y - m_b g \tag{2}$$

Beachten Sie, dass sich die Schwerkraft nicht auf die (horizontale) $x$-Komponente auswirkt, da sie orthogonal zu ihr steht. Das Newton-Prinzip für die Winkelbewegung des Körpers (mit der Drehachse auf dem Massenschwerpunkt des Körpers) besagt, dass

$$I_b \ddot{\theta}_b = -T_m + T_f + F_y l_b \sin(\theta_b) - F_x l_b \cos(\theta_b) \tag{3}$$

bei denen die Schwerkraft die $\theta_b$-Komponente nicht beeinflusst, da sie nicht zu Drehmoment-Effekten führt.

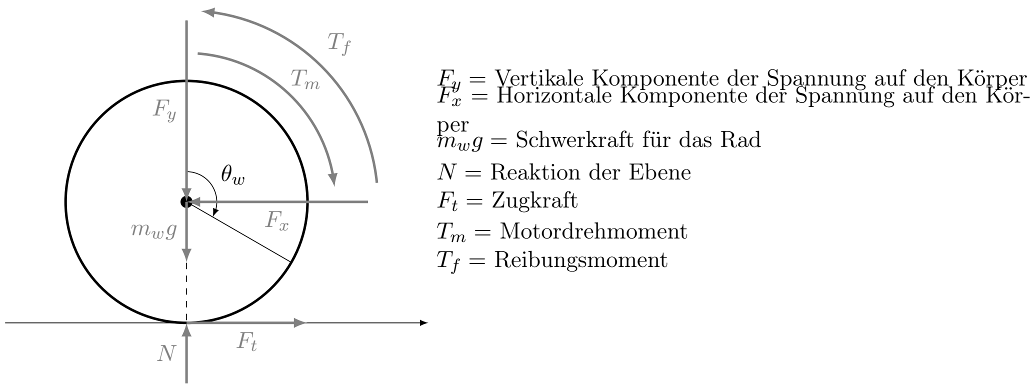


*Figure 3: Zusammenfassung der Kräfte, die auf das Rad des balancierenden Roboters wirken.*

Die Newton'schen Gesetze für die horizontalen und vertikalen Bewegungen des Rades sind

$$m_w \ddot{x}_w = F_t - F_x \tag{4}$$
$$m_w \ddot{y}_w = N - m_w g - F_y = 0 \tag{5}$$

Das Newton'sche Gesetz für die Winkelbewegung des Rades besagt schließlich, dass

$$I_w \ddot{\theta}_w = T_m - T_f - l_w F_t \tag{6}$$

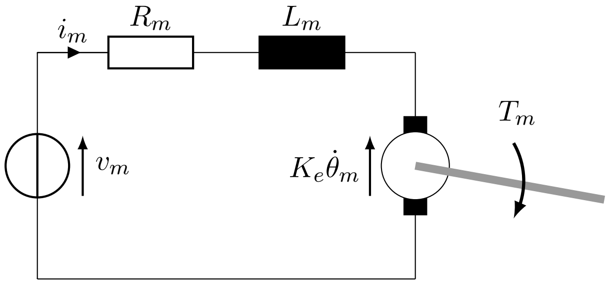


*Figure 4: Schematische Darstellung eines Gleichstrommotors. Hier gibt $\theta_m$ den Winkel des Motors an.*

Nach Analyse der elektrischen Schaltung erhalten wir

$$L_m \frac{di_m}{dt} + R_m i_m = R_m i_m = v_m - e \tag{7}$$

wobei $e$ die gegenelektromagnetische Kraft (emf) ist, die mit der Winkelgeschwindigkeit des Motors verbunden ist durch

$$e = K_e \left(\dot{\theta}_w - \dot{\theta}_b\right) = K_e \left(\frac{\dot{x}_w}{l_w} - \dot{\theta}_b\right) \tag{8}$$

wobei die erste Gleichung in (7) aus der Annahme folgt, dass $L_m = 0$. Durch Ersetzen von (8) in (7) erhalten wir dann

$$i_m = \frac{v_m}{R_m} - \frac{K_e}{R_m} \left(\frac{\dot{x}_w}{l_w} - \dot{\theta}_b\right) \tag{9}$$

Bedenken Sie dann, dass das Drehmoment $T_m$ an der Radwelle, welches durch einen Ankerstrom $i_m$ induziert wird, durch $T_m = K_t i_m$ gegeben ist, wobei $K_t$ der Motordrehmomentkonstante entspricht. Durch Ersetzen von (9) erhalten wir

$$T_m = \frac{K_t}{R_m} v_m - \frac{K_e K_t}{R_m} \left(\frac{\dot{x}_w}{l_w} - \dot{\theta}_b\right) \tag{10}$$

Da wir zwei Motoren haben, die das doppelte Drehmoment $T_m$ erzeugen, ersetzen wir das Motordrehmoment durch

$$\hat{T}_m = 2T_m = \frac{2K_t}{R_m} v_m - \frac{2K_e K_t}{R_m} \left(\frac{\dot{x}_w}{l_w} - \dot{\theta}_b\right)$$

**Remark 1.1**

Beachten Sie die Angaben, die bei den verschiedenen Aufgaben berücksichtigt werden: Achten Sie besonders auf die genauen Bezeichnungen und denken Sie daran, dass $w$ Rad meint, $b$ Körper meint und $m$ Motor meint.

**Remark 1.2**

Um $F_t$, $F_x$ and $F_y$ umzuschreiben, können die Newtonschen Gesetze der lineare Bewegungen der Räder und des Körpers genutzt werden. Wenn alles wie erwartet verläuft ist die Vereinfachung der Gleichung "$\ddot{y}_b \sin(\theta_b) - \ddot{x}_b \cos(\theta_b)$" notwendig. Die folgenden Äquivalenzen können für die Vereinfachung genutzt werden:

$$\begin{cases} x_b &= x_w + l_b \sin(\theta_b) \\ \dot{x}_b &= \dot{x}_w + \dot{\theta}_b l_b \cos(\theta_b) \\ \ddot{x}_b &= \ddot{x}_w + \ddot{\theta}_b l_b \cos(\theta_b) - \dot{\theta}_b^2 l_b \sin(\theta_b) \\ y_b &= y_w + l_b \cos(\theta_b) \\ \dot{y}_b &= \dot{y}_w - \dot{\theta}_b l_b \sin(\theta_b) = -\dot{\theta}_b l_b \sin(\theta_b) \\ \ddot{y}_b &= -\ddot{\theta}_b l_b \sin(\theta_b) - \dot{\theta}_b^2 l_b \cos(\theta_b) \end{cases} \tag{11}$$

Die Eliminierung von $F_t$, $F_x$ und $F_y$ von (3) und von (6) führt zu zwei verschiedenen Bewegungsgleichungen.

**Gleichung 1:** Um $F_x$ and $F_y$ von (3) zu eliminieren, können wir (1) und (2) nutzen und erhalten

$$I_b \ddot{\theta}_b = -\hat{T}_m + T_f + m_b l_b g \sin(\theta_b) + m_b l_b \ddot{y}_b \sin(\theta_b) - m_b l_b \ddot{x}_b \cos(\theta_b). \tag{12}$$

Wir mögen diesen Ausdruck nicht allzu sehr, da er $x_b$ und $y_b$ Terme enthält. Also schreiben wir $\ddot{y}_b \sin(\theta_b) - \ddot{x}_b \cos(\theta_b)$ anders auf. Betrachtet man Figure 1 auf Seite ii, folgt daraus, dass $\ddot{x}_b$ und $\ddot{y}_b$ verknüpft sind mit $\ddot{x}_w$ und $\ddot{\theta}_b$ wie in (11). Somit

$$\begin{aligned} &+\ddot{y}_b \sin(\theta_b) - \ddot{x}_b \cos(\theta_b) = \\ &\quad \left(-\ddot{\theta}_b l_b \sin(\theta_b) - \dot{\theta}_b^2 l_b \cos(\theta_b)\right) \sin(\theta_b) - \left(\ddot{x}_w + \ddot{\theta}_b l_b \cos(\theta_b) - \dot{\theta}_b l_b \sin(\theta_b)\right) \cos(\theta_b) = \\ &\quad -\ddot{\theta}_b l_b \sin^2(\theta_b) - \dot{\theta}_b^2 l_b \cos(\theta_b) \sin(\theta_b) - \ddot{x}_w \cos(\theta_b) - \ddot{\theta}_b l_b \cos^2(\theta_b) + \dot{\theta}_b^2 l_b \sin(\theta_b) \cos(\theta_b) = \\ &\quad -\ddot{\theta}_b l_b - \ddot{x}_w \cos(\theta_b) \end{aligned} \tag{13}$$

Beim Einsetzen in (12) erhalten wir

$$I_b \ddot{\theta}_b = -\hat{T}_m + T_f + m_b l_b g \sin(\theta_b) - m_b l_b^2 \ddot{\theta}_b - m_b l_b \ddot{x}_w \cos(\theta_b) \tag{14}$$

und damit die Neuordnung

$$\boxed{\left(I_b + m_b l_b^2\right) \ddot{\theta}_b = +m_b l_b g \sin(\theta_b) - m_b l_b \ddot{x}_w \cos(\theta_b) - \hat{T}_m + T_f} \tag{15}$$

**Gleichung 2:** Beim Einsetzen von (4) in (6) mit $\ddot{\theta}_w = \ddot{x}_w / l_w$ führt dies zu

$$\frac{I_w}{l_w} \ddot{x}_w = \hat{T}_m - T_f - l_w F_x - l_w m_w \ddot{x}_w. \tag{16}$$

Zum Elimininieren von $F_x$ kombinieren wir (1) und (11) in

$$F_x = m_b \ddot{x}_w + m_b l_b \ddot{\theta}_b \cos(\theta_b) - m_b l_b \dot{\theta}_b^2 \sin(\theta_b). \tag{17}$$

Dies ergibt eingesetzt in (16)

$$\frac{I_w}{l_w} \ddot{x}_w = \hat{T}_m - T_f - l_w \left(m_b \ddot{x}_w + m_b l_b \ddot{\theta}_b \cos(\theta_b) - m_b l_b \dot{\theta}_b^2 \sin(\theta_b)\right) - l_w m_w \ddot{x}_w \tag{18}$$

und als Neuordnung

$$\boxed{\left(\frac{I_w}{l_w} + l_w m_b + l_w m_w\right) \ddot{x}_w = -m_b l_b l_w \ddot{\theta}_b \cos(\theta_b) + m_b l_b l_w \dot{\theta}_b^2 \sin(\theta_b) - T_f + \hat{T}_m.} \tag{19}$$

## 2 Linearisierung der Bewegungsgleichungen

Da das Ziel darin besteht, einen Regler zu entwerfen, werden wir, wenn das mathematische Modell zu kompliziert ist, Schwierigkeiten bei der Konstruktion haben. Wir wissen sehr viel über Regler, wenn das System linear ist. Daher ist es besser, wenn die EOM linearisiert sind.

Da der Betrieb des Roboters um das Gleichgewicht herum erfolgen wird, muss der Linearisierungspunkt bei einem Gleichgewicht $\theta_b = 0$ sein. Daher,

- $\sin(\theta_b) \approx \theta_b$;
- $\ddot{x}_w \cos(\theta_b) \approx \ddot{x}_w$;
- $\ddot{\theta}_b \cos(\theta_b) \approx \ddot{\theta}_b$.

Für $\dot{\theta}_b^2 \sin(\theta_b)$, wird vorgeschlagen, vernachlässigbare Zentripetalkräfte anzunehmen (d.h. kleine Körperwinkel Geschwindigkeiten), so dass wir sagen können $\dot{\theta}_b^2 \approx 0$. Somit sind die linearisierten EOM

$$\begin{cases} \left(I_b + m_b l_b^2\right) \ddot{\theta}_b &= +m_b l_b g \theta_b - m_b l_b \ddot{x}_w - \dfrac{2K_t}{R_m} v_m + \left(\dfrac{2K_e K_t}{R_m} + b_f\right)\left(\dfrac{\dot{x}_w}{l_w} - \dot{\theta}_b\right) \\ \left(\dfrac{I_w}{l_w} + l_w m_b + l_w m_w\right) \ddot{x}_w &= -m_b l_b l_w \ddot{\theta}_b + \dfrac{2K_t}{R_m} v_m - \left(\dfrac{2K_e K_t}{R_m} + b_f\right)\left(\dfrac{\dot{x}_w}{l_w} - \dot{\theta}_b\right) \end{cases} \tag{20}$$